L. Ibn Khaldoun RADES	DEVOIR DE CONTROLE 2	$2^{ème}$ S3 Durée : 1 H
Mr ABIDI Farid	**Mathématiques**	08/11/2013

Exercice 1 : (10 points)

1. Déterminer la forme canonique du trinôme $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$.
2. On considère l'équation (E) : $2x^2 + 2x - 12 = 0$.
   a) Vérifier que $x_1 = 2$ soit une solution de (E).
   b) Déterminer l'autre solution x_2 de (E).
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $-x^2 + 7x - 12 = 0$; b) $8x^2 - 8x + 2 = 0$.
4. Sans calculer le discriminant, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :
   $$x^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0.$$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{5 - x} = x + 1$.

Exercice 2 : (10 points)

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Une unité de longueur choisie, on donne un segment [AC] tel que AC = 4. Soit B milieu de [AC] et D le milieu de [BC].
   a) Donner les distances DC et DA.
   b) Déterminer deux entiers naturels a et c tels que D soit le barycentre de (A, a) et (C, c).

2. Soit ABC un triangle . (Voir annexe ci-jointe à la page 2/2).
   a) Construire, sur l'annexe ci-jointe, I le barycentre de (A, 3) et (B, 2).
   b) Construire, sur l'annexe ci-jointe, G le barycentre de (C, 1) et (I, 5).
   c) Déterminer les réels a, b et c de sorte que G soit le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c).

3. Soit ABCD un carré de centre O . On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1). (Voir annexe ci jointe à la page 2/2).

   a) Montrer que $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. En déduire que G est milieu de [AD].

   b) Déterminer et construire sur l'annexe ci-jointe, l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$.

   c) Déterminer et construire, sur l'annexe ci-jointe, l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

Annexe

Nom de l'élève : ……………………………………………..

Figure de la question 2. de l'exercice n°2 :

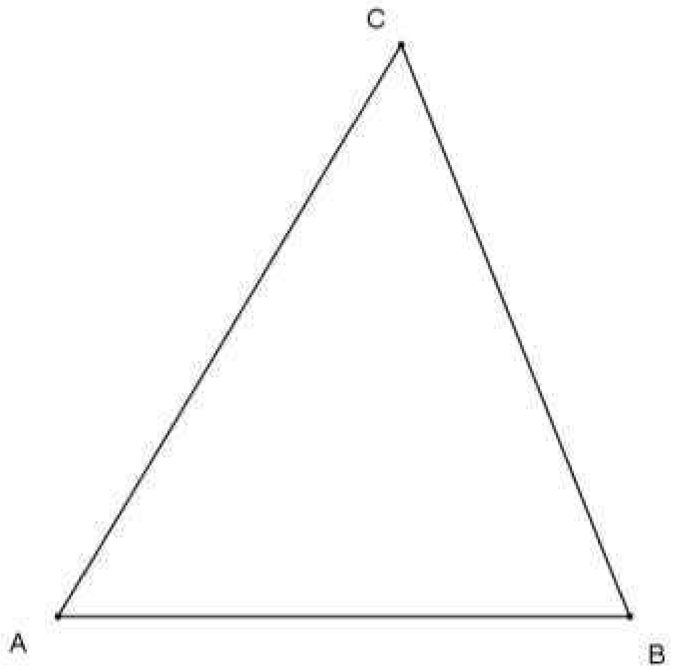
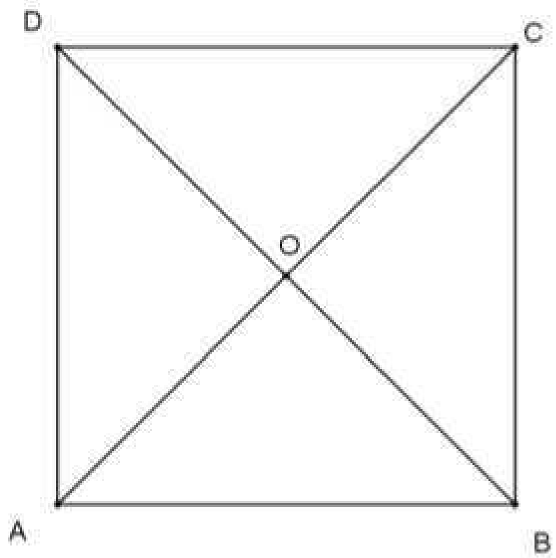


Figure de la question 3. de l'exercice n°2 :



Corrigé

Exercice 1 : (10 points)

1. La forme canonique du trinôme $f(x)=2x^2-3x+3$ est

$$f(x)=2x^2-3x+3=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{3}{2}\right]=2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\right].$$

2. On considère l'équation (E) : $2x^2+2x-12=0$.

a) On a : $2x_1^{\,2}+2x_1-12=8+4-12=0$ donc $x_1=2$ est une solution de (E).

b) L'autre solution x_2 de (E) vérifie $x_1.x_2=\dfrac{-12}{2}=-6$ d'où $x_2=-3$.

3. a) $-x^2+7x-12=0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=7^2-4\times(-1)\times(-12)=49-48=1$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1=\dfrac{-7-1}{-2}=4$ et $x_2=\dfrac{-7+1}{-2}=3$.

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $-x^2+7x-12=0$ est $\{3,4\}$

b) $8x^2-8x+2=0$.

Le discriminant réduit de cette équation est $\Delta'=(-4)^2-8\times2=16-16=0$ donc l'équation admet une solution : $x_0=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $8x^2-8x+2=0$ est $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. $x^2+\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$.

On remarque que $1^2+\left(1+\sqrt{2}\right).(-1)+\sqrt{2}=0$ donc les solutions de l'équation sont : $x_1=-1$ et $x_2=-\sqrt{2}$.

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $8x^2-8x+2=0$ est $\left\{-\sqrt{2},-1\right\}$.

5. $\sqrt{5-x}=x+1$ équivaut à $5-x\geq0$ et $x+1\geq0$ et $5-x=(x+1)^2$

équivaut à $x\leq5$ et $x\geq-1$ et $5-x=x^2+2x+1$

équivaut à $-1\leq x\leq5$ et $x^2+3x-4=0$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+3x-4=0$:

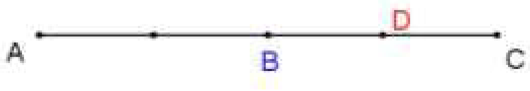
On remarque que $1+3-4=0$ donc les solutions de cette équation sont : $x_1=1$ et $x_2=-4$.

$x_1\in[-1,5]$ et $x_2\notin[-1,5]$.

Il en résulte que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sqrt{5-x}=x+1$ est $\{1\}$.

Exercice 2 : (10 points)

1. Une unité de longueur choisie, on donne un segment [AC] tel que AC = 4. Soit B milieu de [AC] et D le milieu de [BC].



a) $DC = \frac{1}{4}AC = 1$ et $DA = \frac{3}{4}AC = 3$.

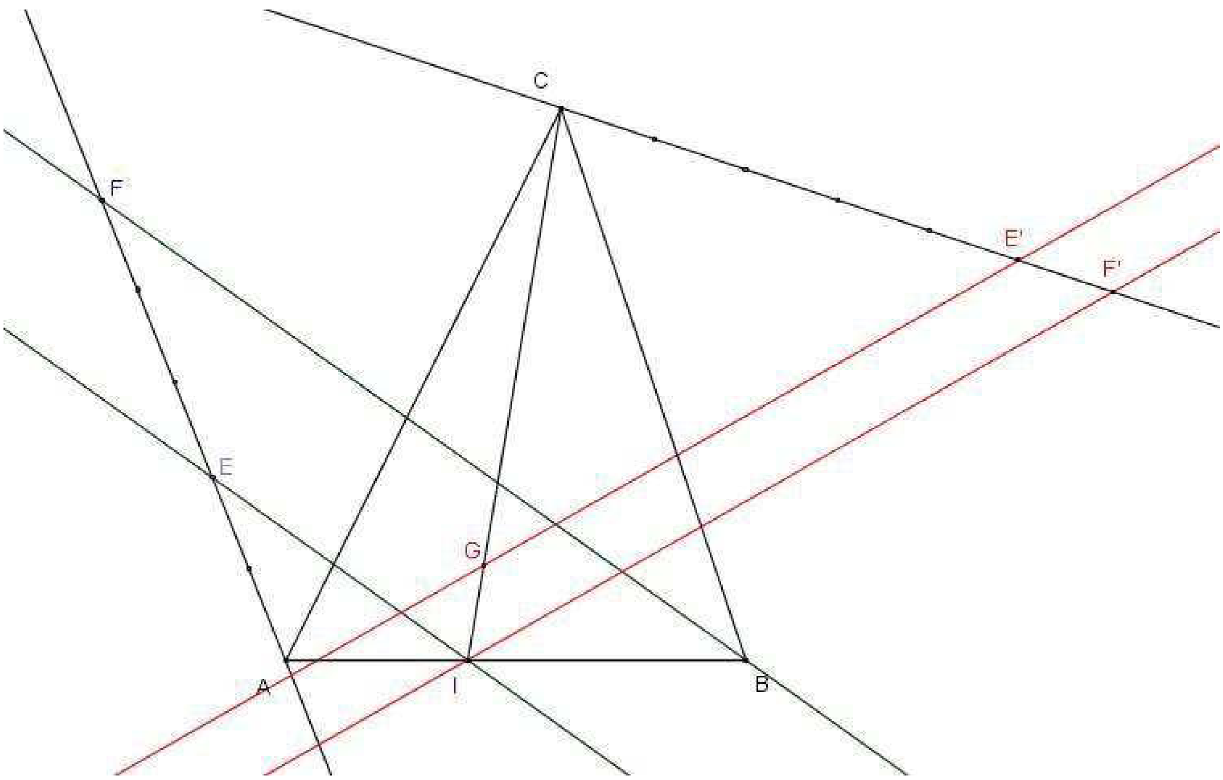
b) D est le barycentre de (A, DC) et (C, DA) donc D est le barycentre de (A, 1) et (C, 3).

2. Soit ABC un triangle . (Voir annexe ci-jointe à la page 2/2).

a) I le barycentre de (A, 3) et (B, 2) équivaut à $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) G le barycentre de (C, 1) et (I, 5) équivaut à $\overrightarrow{CG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CI}$.

Figure



c) G le barycentre de (C, 1) et (I, 5) équivaut à $\overrightarrow{GC} + 5\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

et I le barycentre de (A, 3) et (B, 2) équivaut à $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{GI}$.

D'autre part $\overrightarrow{GC} + 5\overrightarrow{GI} = \vec{0}$ équivaut à $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Donc G est le barycentre des points pondérés (A, 3) , (B, 2) et (C, 1).

3. Soit ABCD un carré de centre O . On désigne par G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1).

a) $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D'où $2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC}$; or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, il en résulte : $2\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Ainsi , G est milieu de [AD].

b) Soit l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$,

$M\in(E)$ équivaut à $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ équivaut à $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=CD$ équivaut à 2 MG = 2 GC équivaut à GM = GC.

Donc (E) est le cercle de centre G et de rayon C ou encore (E) est le cercle de diamètre [CD].

c) Soit l'ensemble (F) des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

$M\in(F)$ équivaut à $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$ équivaut à $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MO}\right\|$

équivaut à 2 MG = 2 MO équivaut à MG = MO.

Donc (F) est la médiatrice du segment [GO].

Figure :